



**Alberto Carnicero López**

Doctor Ingeniero Industrial del ICAI prom. 1995. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica e Investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica de la ETSI-ICAI. Sus campos de conocimiento están relacionados con la aplicación de métodos numéricos a la resolución de problemas de dinámica de estructuras y mecánica de medios continuos, así como el modelado de materiales inteligentes para su empleo en actuadores o sensores.



**Oscar López García**

Doctor Ingeniero Industrial. Profesor del Departamento de Fluidos y Calor e Investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica de la ETSI-ICAI. Sus campos de conocimiento son la mecánica del medio continuo, sistemas de energía eólica, mecánica de la fractura y fatiga, materiales inteligentes y el método de los elementos finitos.



**Víctor Torres Toledo**

Ingeniero Técnico Industrial del ICAI y actualmente estudia quinto curso de Ingeniería Industrial en ICAI.



# Un modelo para el cálculo de catenarias ferroviarias

Actualmente existen diversos sistemas que permiten alimentar eléctricamente trenes, ya sea mediante corriente alterna o corriente continua. El más empleado hoy en día se denomina catenaria<sup>1</sup> y toma el nombre de la curva que aproximadamente forma uno de los cables que lo conforman. Por lo tanto, en la tecnología ferroviaria bajo la denominación 'catenaria' se engloba a todo el conjunto de elementos que constituyen la línea de transporte y suministro de energía eléctrica a los trenes (ver Figura 1). La captación de energía se realiza por medio de un elemento de frotación denominado pantógrafo.

Básicamente, los elementos que componen una catenaria (Figura 2) son:

- Hilo de contacto. Es el elemento que se encuentra en contacto con el pantógrafo. Debe tener una geometría tal que el rozamiento entre éste y el pantógrafo sea lo más uniforme posible de forma que la captación de energía sea óptima.
- Hilo sustentador. Es el elemento superior que desde un punto de vista mecánico soporta el peso del hilo de contacto.
- Péndolas. Son los elementos verticales que adecuadamente situados se encargan de garantizar la geometría adecuada en el hilo de

contacto transmitiendo parte del peso de este al sustentador:

- Falso sustentador. Es un elemento que no aparece en todos los tipos de catenarias y que tiene como misión aumentar y uniformizar la rigidez del conjunto mediante la aplicación de una tensión adicional. A la péndola que va unida al falso sustentador se le denomina habitualmente péndola en Y.
- Grifas. Son los elementos que sirven para unir las péndolas al falso sustentador e hilo de contacto.

La geometría formada por los elementos anteriores que se encuentra entre dos postes contiguos se denomina vano, su longitud depende del tipo de catenaria y oscila de forma aproximada entre los 40 y los 60 metros, al conjunto de vanos situados entre dos puntos de aplicación de tensión al hilo de contacto y sustentador se le denomina cantón.

Las condiciones sobre la geometría del hilo de contacto dependen del tipo de catenaria, así las catenarias para trenes de alta velocidad exigen habitualmente un hilo horizontal, mientras que otras exigen una determinada contraflecha en el centro del vano. La forma de ésta está relacionada con la velocidad de circulación del tren.

El auge de la alta velocidad en el ferrocarril europeo supone un reto tecnológico sin pre-



Figura 1: Configuración clásica de una catenaria

<sup>1</sup> Catenaria proviene de la palabra latina 'catena', que significa cadena y hace referencia a la forma que adquiere una cadena –o cualquier cable– al ser suspendida entre dos puntos fijos.

cedentes en el desarrollo de los sistemas ferroviarios que deben cumplir con requisitos cada vez más exigentes. Los métodos tradicionales de cálculo de catenarias son claramente insuficientes para abordar este reto haciéndose necesario el desarrollo de métodos avanzados de cálculo que permitan obtener soluciones próximas a las óptimas antes de proceder a su validación experimental. El principal problema a resolver es la obtención de la respuesta dinámica en el fenómeno de interacción entre la catenaria y el pantógrafo. La resolución de este problema requiere como paso previo el cálculo de la catenaria tensa y las correspondientes dimensiones del pendolado. Realizar este cálculo empleando elementos finitos exige un elevado tiempo de computación debido a las no linealidades existentes y a la necesidad de remallar la geometría en cada una de las iteraciones. Por otro lado la resolución del problema de interacción dinámica requiere una formulación en elementos finitos o el empleo de otros métodos que a día de hoy no están suficiente contrastados o extendidos. Los resultados presentados aquí son los primeros obtenidos en el desarrollo de un proyecto que pretende optimizar la geometría de catenarias para trenes de alta velocidad.

Los métodos tradicionales de cálculo de pendolado realizan algunas hipótesis de cara a simplificar los cálculos, que, hoy en día, con los medios de cálculo existentes pueden evitarse. Entre ellas cabe destacar la aproximación de la forma de la catenaria por una parábola, que produce resultados razonables, igualar la tensión de los cables a la tensión horizontal, o la realización de los cálculos vano a vano, que como se verá mas adelante produce unos resultados distintos de los que se obtendrían si el cálculo se realizara sobre todo el cantón.

A continuación se presentan, sin entrar en la formulación matemática empleada, algunos de los resultados obtenidos por los autores con un modelo basado en las ecuaciones exactas de la catenaria y que actualmente están desarrollando. El modelo tiene por objeto dimensionar de una forma rápida, robusta y precisa el pendolado de un cantón completo dadas unas condiciones de flecha a cumplir por el hilo de contacto. Este modelo además será empleado para la obtención de una malla de elementos finitos que se empleará posteriormente para la resolución del problema de la interacción dinámica entre la catenaria y el pantógrafo con objeto de optimizar la geometría de la catenaria.

Figura 2. Elementos habituales en una catenaria.

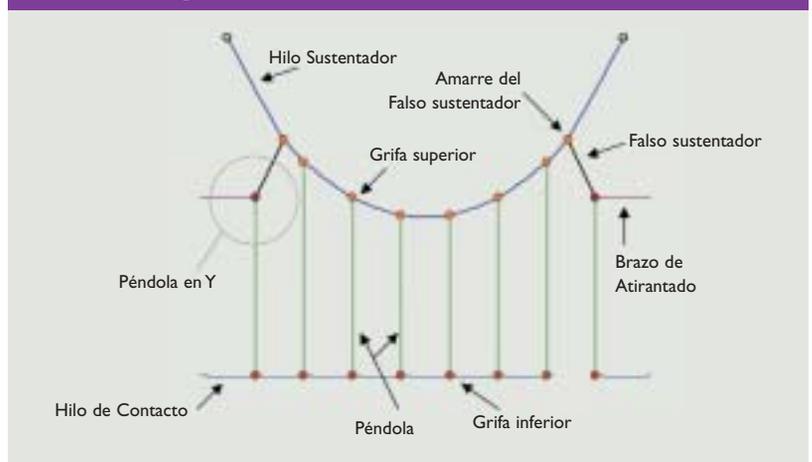
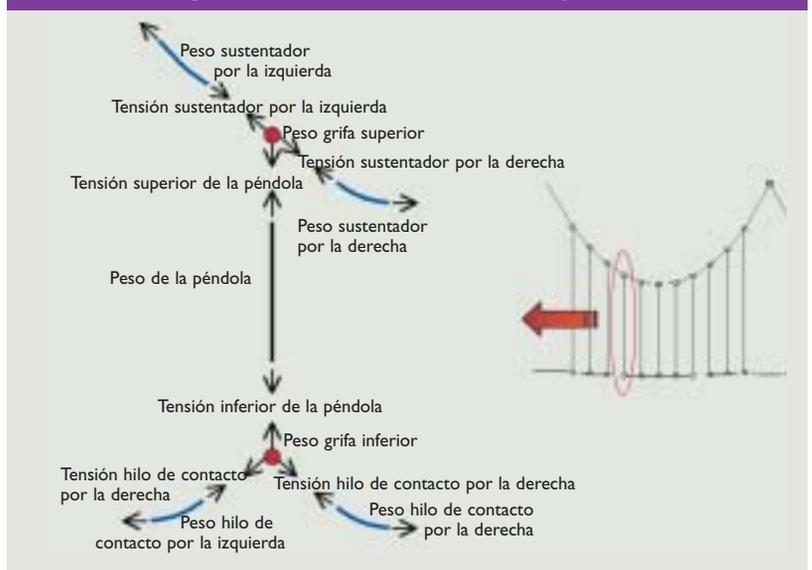


Figura 3. Fuerzas consideradas en el equilibrio.



El modelo es válido para catenarias compensadas, sometidas a cargas en un único plano, con postes o ménsulas a distintas alturas y con posibilidad de eliminar el falso sustentador. Se trata por tanto de un modelo bidimensional, pero que puede ser extendido fácilmente, en caso de querer considerar el descentramiento de la catenaria, a tres dimensiones.

### Base del modelo desarrollado

El modelo desarrollado toma como incógnitas las posiciones de las grifas y formula las ecuaciones de equilibrio en cada una de ellas en función de su posición. En la Figura 3 se pueden ver todas las variables consideradas y que son expresadas en función de las posiciones de las grifas. El resultado es un sistema de ecuaciones no lineal que a partir de los valores de geometría de la catenaria (longitud y

número de vanos, posición de las péndolas, etc.), tensiones y pesos de los distintos elementos, determina las posiciones finales de las

grifas y por tanto la longitud de las péndolas, imponiendo unas condiciones determinadas en las posiciones de las grifas del hilo de contacto (horizontal, parábola vano a vano, etc.).

**Tabla 1. Datos CRU 220**

<b>Longitud del vano</b>	52 m
<b>Peso lineal del sustentador</b>	1.414 kg/m
<b>Peso lineal del hilo de contacto</b>	1.07 kg/m
<b>Número de hilos de contacto</b>	2
<b>Tensión mecánica en el sustentador</b>	1.620 kg
<b>Tensión mecánica en hilo de contacto</b>	1.530 kg
<b>Flecha inicial en el centro del vano</b>	20 cm
<b>Grifa sustentador</b>	120 g
<b>Grifa hilo de contacto</b>	350 g
<b>Peso lineal de la péndola</b>	0.1 kg/m

### Comparativa con CRU 220 y otros ejemplos

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el dimensionamiento de una catenaria con una geometría CRU 220 cuyas características (aparecen en la Tabla 1).

Las longitudes de las péndola obtenidas con el modelo pueden verse en la Tabla 2.

Un aspecto a destacar de éstos resultados es que el valor de las longitudes de las péndolas no es igual en el primer y último vano que en los vanos centrales. Por lo tanto las dimensiones del pendolado no son iguales calculando vano a vano, como hacen los métodos tradicionales, que calculando un cantón entero.

A continuación se comparan los valores obtenidos, con los datos de longitud de las péndolas calculados mediante dos métodos tradicionales de cálculo de pendolado vano a vano, que emplean para su formulación las ecuaciones de equilibrio de momentos en el apoyo y realizan la aproximación de la curva catenaria por una parábola. El segundo método realiza además diversas iteraciones para tener en cuenta las variaciones el peso debidas a la modificación en la longitud de las péndolas por lo que se supone que es más exacto que el primero. Para mas detalles ver la referencia 1. Para la comparativa se han elegido las longitudes en los vanos centrales del cantón. Así mismo, se presentan los resultados en el caso de emplear un solo vano para calcular el pendolado.

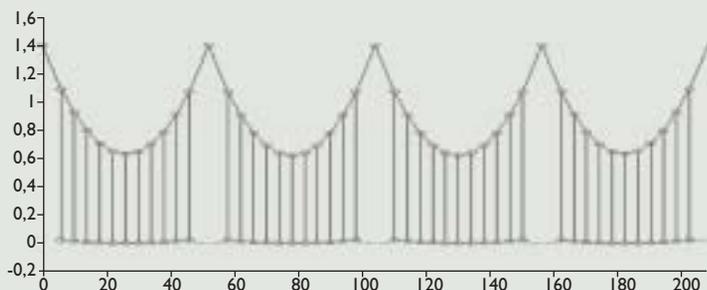
Como se observa en la Tabla 3, existen pequeñas diferencias entre las longitudes calculadas por los distintos métodos. Una de las causas de estas diferencias es la consideración, por parte de los métodos tradicionales, del hilo de contacto exclusivamente como un peso muerto, cuando realmente la tensión de éste disminuye el peso muerto del mismo por lo que tiene un efecto inmediato sobre la longitud de las péndolas. El cuadro además muestra la gran diferencia que existe entre realizar el cálculo vano a vano o de todo el cantón.

De cara a mostrar la versatilidad del modelo se presentan diversos resultados de casos de cantones ficticios con diversas condiciones sobre el hilo de contacto y los apoyos. Así en la Figura 5 se muestra un cantón que presenta una condición de horizontalidad en el hilo de contacto, los apoyos se encuentran a diferentes alturas en cada vano y el pendolado

**Tabla 2. Pendolado de una CRU 220**

	Péndola (mm)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Cantón 1</b>	1083	938	825	744	693	676	690	737	815	923	1065
<b>Cantón 2</b>	1062	918	808	729	680	665	680	729	808	918	1062
<b>Cantón 3</b>	1062	918	808	729	680	665	680	729	808	918	1062
<b>Cantón 4</b>	1065	923	815	737	690	676	693	744	825	938	1083

**Figura 4. Pendolado de una CRU220**



**Tabla 3. Comparativa CRU 220**

Número de péndola	Equilibrio momentos	Equilibrio momentos modificado	Modelo propuesto (varios vanos)	Modelo propuesto (un vano)
1	1081	1084	1062	1083
2	935	939	918	938
3	823	827	808	825
4	743	746	729	744
5	695	698	680	693
6	681	681	665	676
7	695	698	680	693
8	743	746	729	744
9	823	827	808	825
10	935	939	918	938
11	1081	1084	1062	1083

también es diferente en cada vano. En la Figura 6 se muestra un cantón de cuatro vanos en el que se impuso que el hilo de contacto describa una parábola en todo el cantón; y por último, en la Figura 7 se ha simulado un cantón de 8 vanos que presenta una pendiente del 20 %.

### Catenarias con falso sustentador

Un elemento esencial hoy en día en las catenarias para trenes de alta velocidad es el falso sustentador (ver Figura 2). A continuación se presenta un ejemplo donde se analiza la influencia de la existencia de falso sustentador en el comportamiento de la catenaria y su importancia cuando se trabaja en alta velocidad.

Los datos de la catenaria analizada son los mismos que los de la CRU 220 pero con la flecha inicial nula (ver Figura 8). El falso sustentador está amarrado a 8 m y tiene una tensión de 500 kg. En la Tabla 4 se presentan los valores de las longitudes de las péndolas para esta catenaria con y sin falso sustentador así como la diferencia entre ellas.

A la vista de los resultados cabe comentar que las péndolas de los vanos con falso sustentador son más largas que las de la catenaria que no los tiene. Este resultado coincide con lo que cabe esperar ya que el cable sustentador del vano con 'Y' tiene una posición más elevada que el del vano que carece de este elemento.

La diferencia negativa de la primera péndola es debida a que la posición horizontal es diferente en ambas péndolas y por lo tanto no son comparables. Para entender mejor el efecto del falso sustentador sobre el comportamiento de la catenaria es necesario introducir un nuevo concepto: la flexibilidad o elasticidad de una catenaria.

### Aplicación al cálculo de la elasticidad de catenarias

Como una aplicación más avanzada, el modelo, puede también emplearse para determinar la denominada elasticidad de la catenaria. La elasticidad de una catenaria se define como la elevación que experimenta la catenaria cuando se le aplica una fuerza vertical hacia arriba de 1N. La elasticidad no es constante a lo largo de todo el vano siendo normalmente máxima en el centro del mismo. Se trata además de un parámetro altamente no lineal, no sólo por el propio comportamiento de la catenaria, sino también por el posible pandeo de las péndolas, por lo que se debe calcular para distintos valores de fuerza

Figura 5. Cantón con apoyos a distinta altura e hilo de contacto horizontal

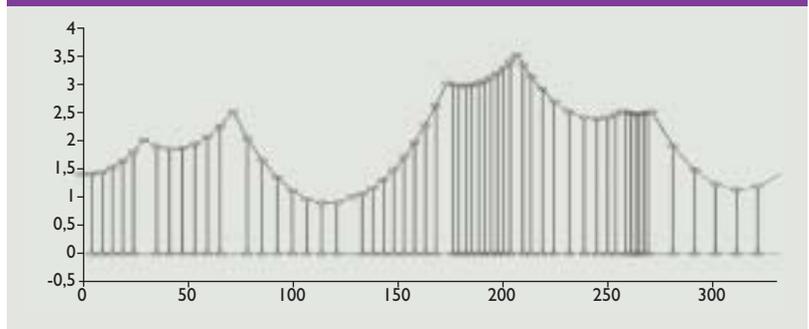


Figura 6. Cantón con condición parabólica sobre el hilo de contacto

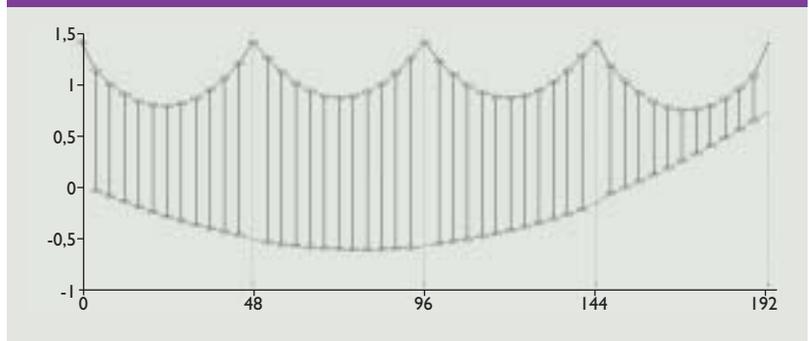


Figura 7. Cantón con hilo de contacto en pendiente del 20 %

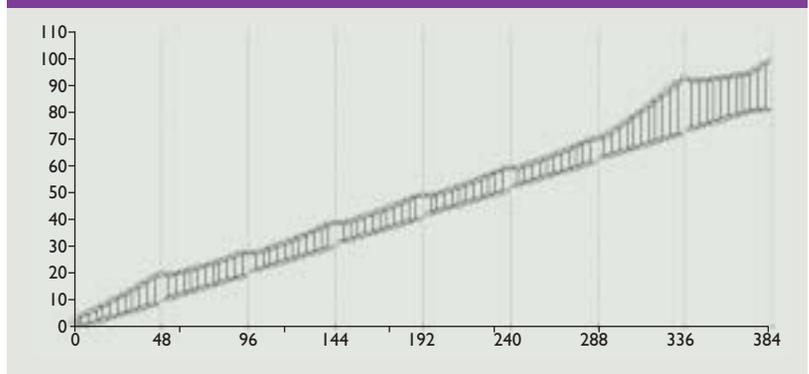
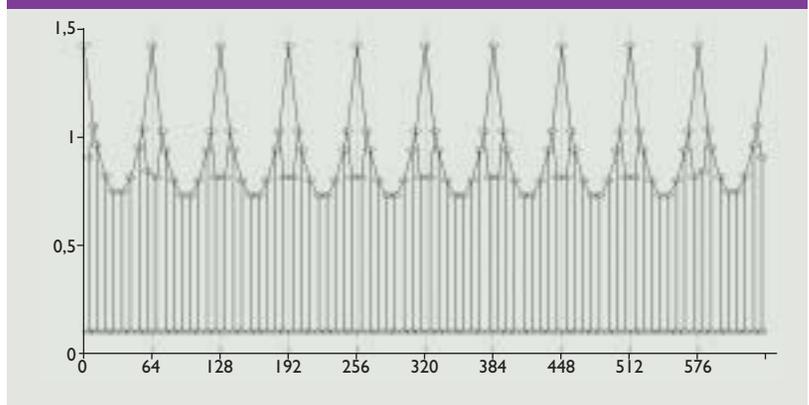


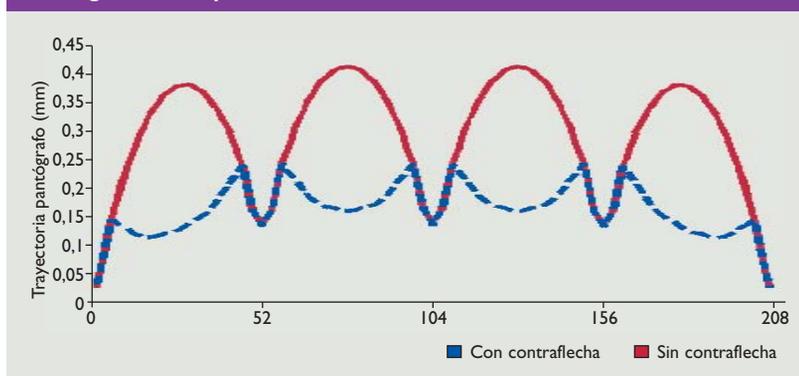
Figura 8. Ejemplo de catenaria con falso sustentador



**Tabla 4. Comparativa de pendolados con y sin falso sustentador.**

Vano		Péndola (mm)										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	Con Y	1040	970	896	843	811	799	809	840	891	964	1032
	Sin Y	1083	917	788	695	639	619	635	688	777	903	1065
	Diferen.	-43	53	108	148	172	181	174	152	114	61	-33
2	Con Y	1022	961	888	835	804	793	804	835	888	961	1022
	Sin Y	1062	898	771	680	625	607	625	680	771	898	1062
	Diferen.	-40	63	117	155	179	186	179	155	117	63	-40
3	Con Y	1022	961	888	835	804	793	804	835	888	961	1022
	Sin Y	1062	898	771	680	625	607	625	680	771	898	1062
	Diferen.	-40	63	117	155	179	186	179	155	117	63	-40
4	Con Y	1024	964	891	840	809	799	811	843	896	970	1032
	Sin Y	1065	903	777	688	635	619	639	695	788	918	1083
	Diferen.	-41	61	114	152	174	181	172	147	108	53	-52

**Figura 9. Comparativa del efecto de la contraflecha en un CRU220**



**Figura 10. Comparativa del efecto de la tensión en el falso sustentador**



de empuje ya que la extrapolación de resultados es inviable. Normalmente el valor que se emplea para comparar distintas catenarias es de 100 N. Este parámetro pretende dar una idea de la bondad del diseño ante el paso del pantógrafo, sin embargo, debido a que no es constante en todo el vano no resulta suficiente y se hace necesario definir el llamado coeficiente de variación que da una idea de la regularidad del parámetro de elasticidad a lo largo del vano. Conviene recordar que la

catenaria ideal presenta una flexibilidad constante en todos sus puntos. De esta forma, la fuerza de contacto entre la catenaria y el pantógrafo resultaría mucho más homogénea obteniéndose una mejor captación de energía y un menor desgaste en la catenaria.

En la Figura 9 se muestra el efecto que la contraflecha tiene sobre la trayectoria del pantógrafo. Como se puede ver la introducción de contraflecha disminuye el recorrido del mismo. La existencia de falso sustentador, tiene un efecto mucho más acusado. En la Figura 10, se compara una catenaria de Alta Velocidad con y sin falso sustentador. Como se puede apreciar la curva de elasticidad del cantón con falso sustentador (en color rojo) es más suave, especialmente en la zona de los apoyos, por lo tanto el pantógrafo 'vera' una catenaria más homogénea lo que repercute, como se ha comentado anteriormente, en un menor desgaste, una mejor captación de la energía y la posibilidad de una velocidad de circulación mayor:

## Conclusiones

En este artículo se ha hecho una breve descripción cualitativa de un modelo mecánico de catenaria desarrollado por los autores. Actualmente el modelo se está empleando con resultados muy satisfactorios para dimensionamiento de péndolas, cálculo de flexibilidades, análisis de sensibilidad y la obtención de una malla de elementos finitos para la resolución del problema de la interacción dinámica entre la catenaria y el pantógrafo. Con relación a este último punto el empleo de este modelo permite reducir el tiempo de cálculo de la geometría en equilibrio de algunos minutos a unos pocos segundos. El modelo además puede ser extendido a otro tipo de configuraciones como puentes colgantes o líneas de transporte de energía eléctrica.

## Agradecimientos

Los resultados que se presentan en este artículo se enmarcan dentro del proyecto 'Optimización del diseño eléctrico y mecánico de catenarias de trenes de alta velocidad' que los autores están realizando en la actualidad con financiación parcial del Ministerio de Fomento. ■

## Bibliografía

- J. Montesinos y M. Carmona. *Tecnología de la catenaria. Mantenimiento de Infraestructura RENFE*. 2002.
- C. Asenjo. *Modelos para el cálculo mecánico de catenarias ferroviarias. Proyecto fin de carrera en la ETSI-ICAI*. 2003.